6 Практикалық сабақ
1.3 Эквивалент шексіз аз шамалар

Шексіз аз шамаларды салыстыру. $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ - шексіз аз шамалар болсын.

Егер $\dfrac{\beta}{\alpha}$ қатынасының шегі ақырлы және нөлге тең емес болса, яғни $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=A\neq 0$ болса, онда шексіз аз α және β шамалары *бірдей өлшемді шексіз аз шамалар* деп аталады.

Егер екі шексіз аз шамалардың қатынасы $\dfrac{\beta}{\alpha}\to 0$, яғни $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ $(\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty)$ болса, онда β шексіз аз шамасы α - ға қарағанда *жоғарғы ретті шексіз аз шама* деп аталады.

Егер $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=A\neq 0$ болса, онда β шексіз аз шама мен α^k шексіз аз шамалары *бірдей өлшемді шексіз аз шамалар* деп аталады.

Егер $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ болса, онда α және β *эквивалент шексіз аз шамалар* деп аталады.

Е с к е р т у. Егер $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ - шегі жоқ болса және шексіздікке ұмтылса, онда α мен β салыстырылмайды дейді.

Эквивалент шексіз аз шамаларды шекті есептеуде қолдану. $\alpha(x)$ функциясы $x\to a$-да шексіз аз шама болсын $\left(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0\right)$. Эквивалент шексіз аз шамаларды қарастырайық:

1. $\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

2. $tg\,\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

3. $\arcsin\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

4. $arctg\,\alpha(x)\approx\alpha(x)$.

5. $\log_a(1+\alpha(x))\approx\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$.

6. $\ln(1+\alpha(x))\approx\alpha(x)$.

7. $1-\cos\alpha(x)\approx\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$.

8. $a^{\alpha(x)}-1\approx a(x)\ln a$.

9. $e^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)$.

10. $(1+\alpha(x))^a-1\approx a\cdot\alpha(x)$.

11. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\approx\dfrac{\alpha(x)}{n}$.

12. $(1+\alpha(x))^{1/\beta(x)}\approx e^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}$.

Эквивалент шексіз аз шамаларды пайдаланып шектерді табуға болады.

182. $t-$шексіз аз болсын. $\alpha=5t^2+2t^5$ және $\beta=3t^2+2t^3$ шексіз аз шамаларды салыстыру керек.

Шешуі: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5t^2+2t^5}{3t^2+2t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5+2t^3}{3+2t}=\dfrac{5}{3}.$

α және β қатынасының шегі 0-ге тең емес тұрақты сан болғандықтан, α және β - бірдей өлшемді шексіз аз шамалар болады. ▲